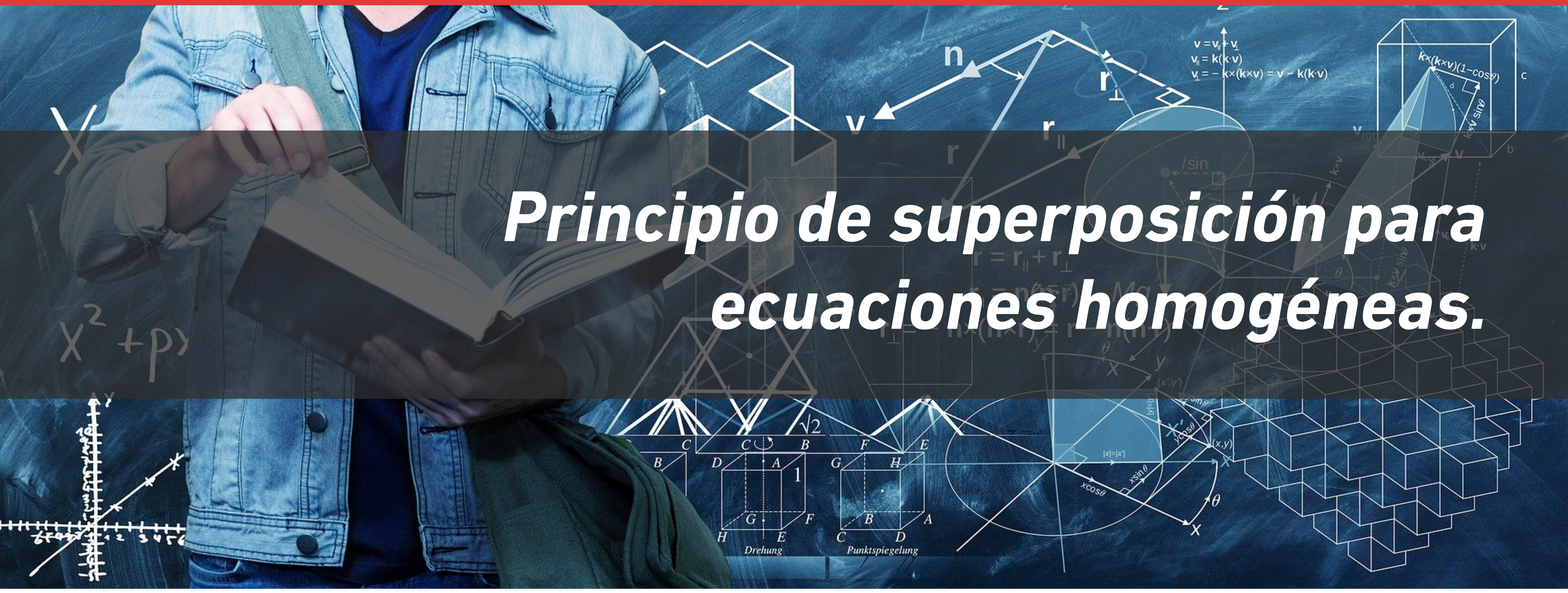
ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN

Sea una ecuación diferencial dada por:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = f(x) \qquad (13)$$

La expresión (13) se denomina ecuación diferencial lineal de segundo orden, En el caso en el **que** $f(x) = 0$ se dirá que la ecuación diferencial es una **ecuación diferencial homogénea.** Por otro lado, si $f(x) \neq 0$ entonces se dice que la ecuación diferencial expresada en (13) es in-homogénea.



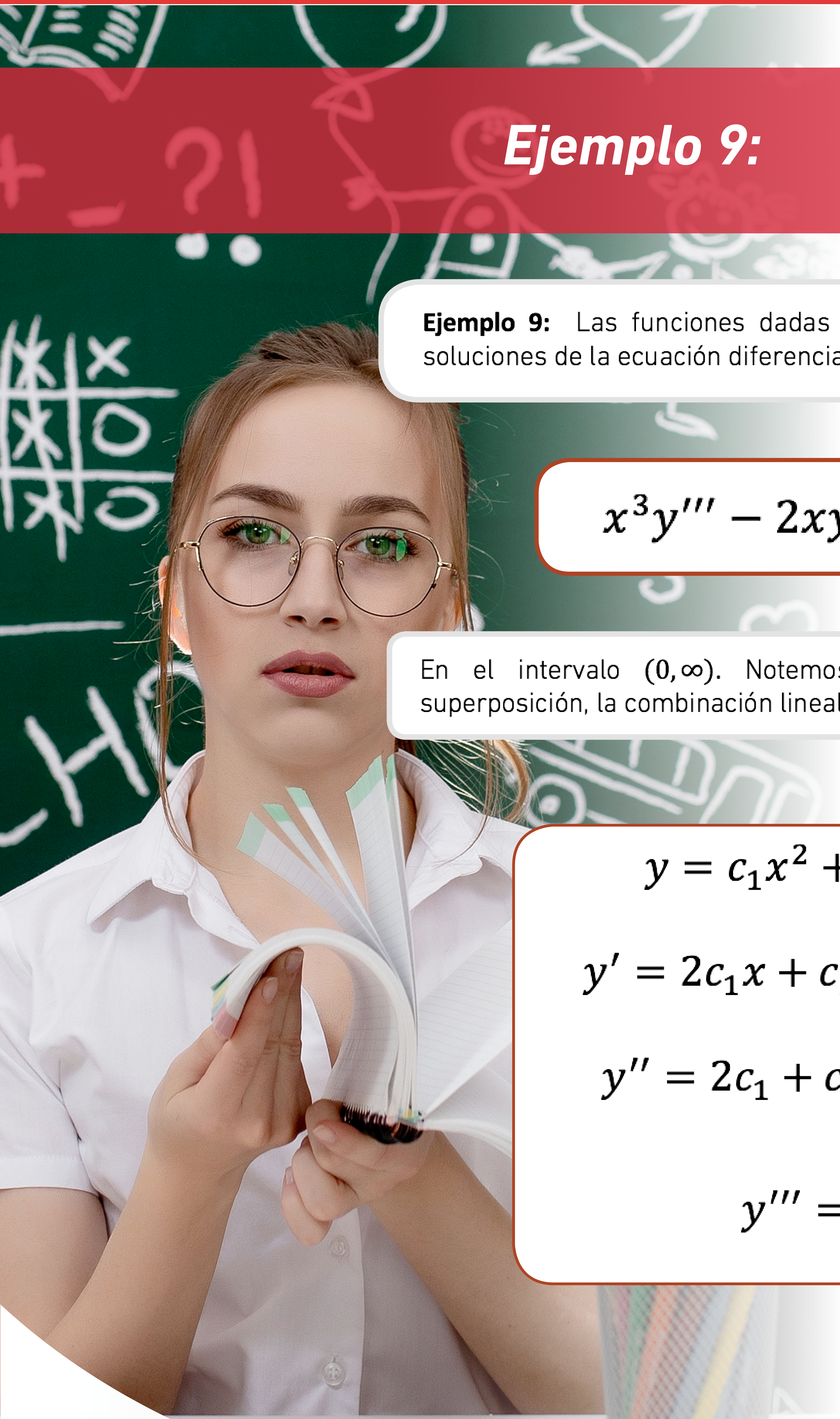
Principio de superposición para ecuaciones homogéneas.

Sean $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluciones de la ecuación diferencial de orden n en un recinto I. La combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \cdots + c_n y_n(x) \qquad (14)$$

Dónde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias, es también solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 9:



Ejemplo 9: Las funciones dadas por $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 lnx$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$x^3 y''' - 2xy' + 4y = 0$$

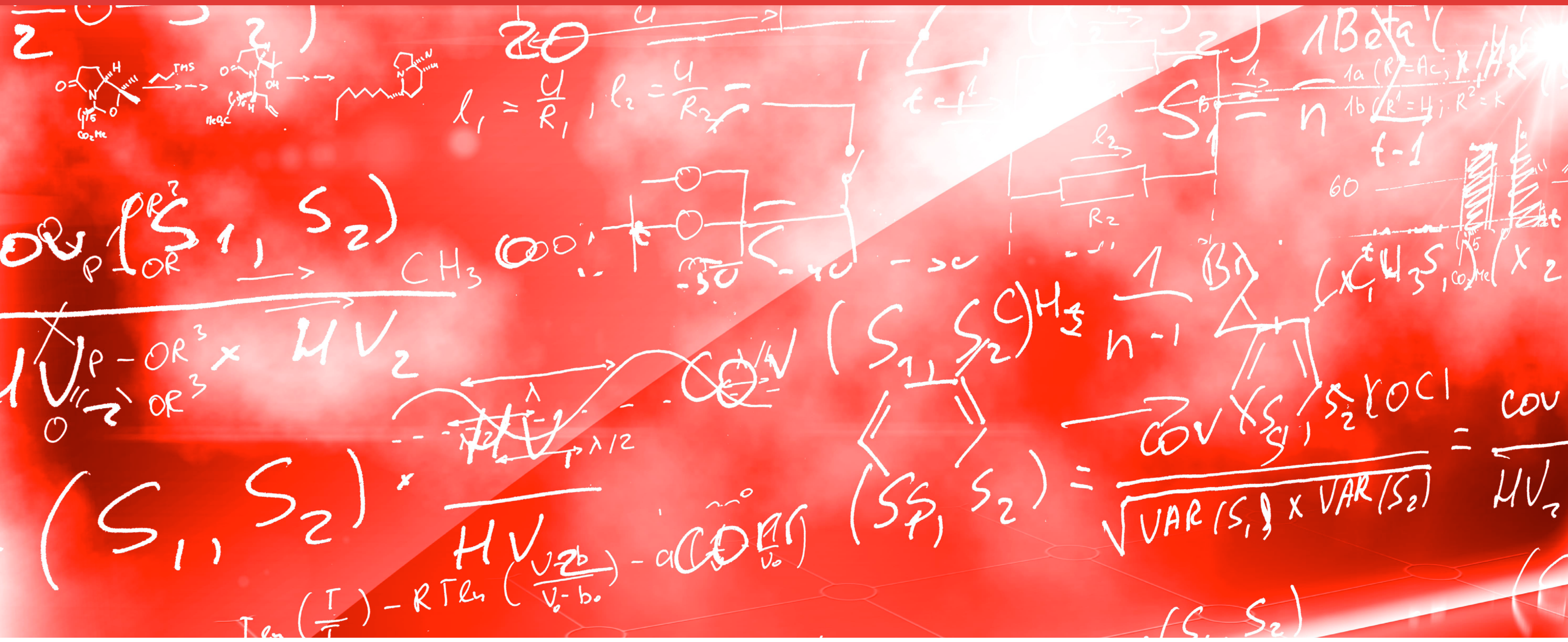
En el intervalo $(0, \infty)$. Notemos que, por el principio de superposición, la combinación lineal y sus derivadas serán:

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 lnx$$

$$y' = 2c_1 x + c_2(2xlnx + x)$$

$$y'' = 2c_1 + c_2(2lnx + 3)$$

$$y''' = \frac{2c_2}{x}$$



Al reemplazar estas expresiones en la ecuación diferencial se obtiene:

$$x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$$

$$x^3\left(\frac{2c_2}{x}\right) - 2x(2c_1x + c_2(2xlnx + x)) + 4(c_1x^2 + c_2x^2lnx) = 0$$

Al simplificar expresiones en este último término llegamos a:

$$2c_2x^2 - 4x^2c_1 - 4x^2c_2lnx - 2c_2x^2 + 4c_1x^2 + 4c_2x^2lnx = 0$$

Verificando así que la combinación lineal también es solución de la ecuación diferencial.

Criterio para soluciones linealmente independientes.

Sean $y_1, y_2, \dots, y_n$ las n soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n en un recinto I. El conjunto solución es linealmente independiente en I sí y sólo si:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0 \qquad (15)$$

Para todo valor de $x \in I$.

Ecuaciones Diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

Consideremos la ecuación diferencial dada por:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad (16)$$

Para solucionar esta ecuación diferencial simplemente ponemos que existe una solución no trivial, es decir, diferente de cero dada por $y = e^{mx}$.

Al calcular las derivadas tenemos $\frac{dy}{dx} = me^{mx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$, sustituyendo esas expresiones en la ecuación (16) se tiene:

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

Tomando factor común de e^{mx} se tiene:

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

Como supusimos que la solución es no trivial, esto es $e^{mx} \neq 0$ entonces esto implica que

$$am^2 + bm + c = 0 \qquad (17)$$

Es fácil notar que la expresión (17) es una ecuación cuadrática, y para hallar las soluciones de la misma se hace uso de:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (18)$$

Expresión de la cual se desprenden las siguientes dos soluciones:

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (19)$$

$$m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (20)$$

Y de los teoremas vistos antes, se desprende el hecho de que la combinación lineal de estas soluciones es también una solución, es decir:

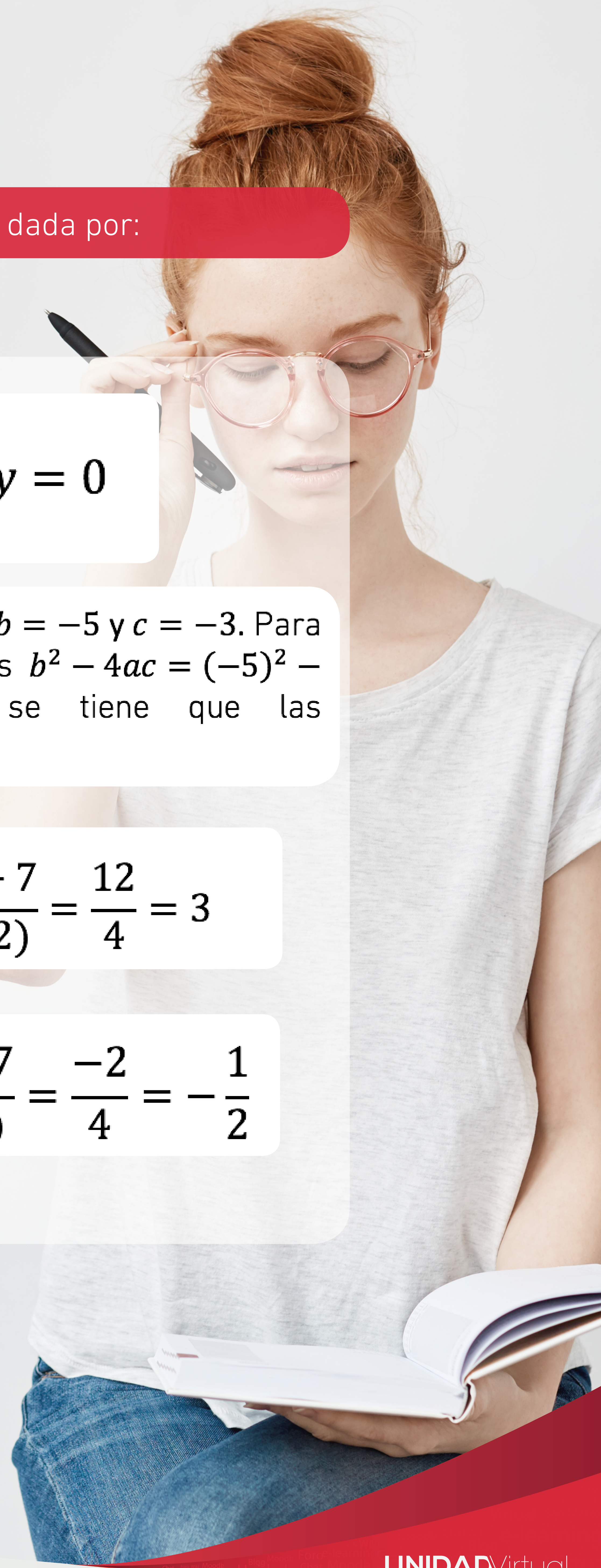
$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \qquad (21)$$

También será una solución.

De la expresión dada en (18), se desprenden tres casos de solución de la discriminante de dicha expresión, es decir, de la expresión $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$ se tiene:

CASO I: Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la solución será

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \qquad (22)$$



Ejemplo 10: Resolver la ecuación diferencial dada por:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

Es fácil notar que para esta ecuación $a = 2$, $b = -5$ y $c = -3$. Para este caso se tiene que el discriminante es $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49 > 0$, entonces se tiene que las constantes son:

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5+7}{2(2)} = \frac{12}{4} = 3$$

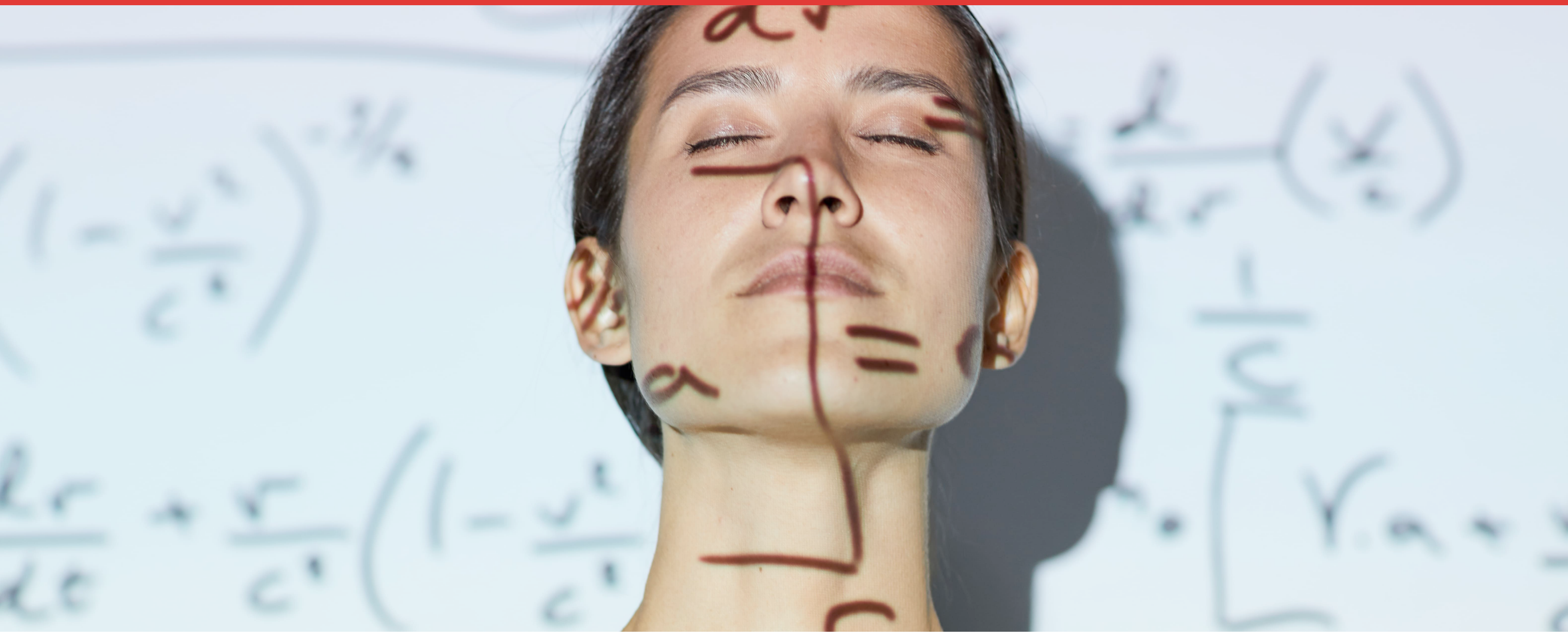
$$m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5-7}{2(2)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial se obtiene de (22) con $m_1 = 3$ y $m_2 = -\frac{1}{2}$, es decir:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

CASO 2: Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la solución de la ecuación diferencial tendrá la forma:

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} \qquad (23)$$



Ejemplo 11: Resolver la ecuación diferencial dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

Para este caso se tiene que $a = 1$, $b = 6$ y $c = 9$, al reemplazar estos valores en

$$b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

Luego la solución tendrá la forma expresada en (23), con $m = -3$, es decir:

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$$

CASO 3: Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces, la solución debe tomarse de los números complejos, esto es:
Se define el número $z = a + ib$ un número complejo, al número a se le denomina la parte real del número complejo, al número b se le denomina la parte imaginaria del número complejo y se define la unidad imaginaria según $i = \sqrt{-1}$. Por ejemplo, $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$. En (19) teníamos qué

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

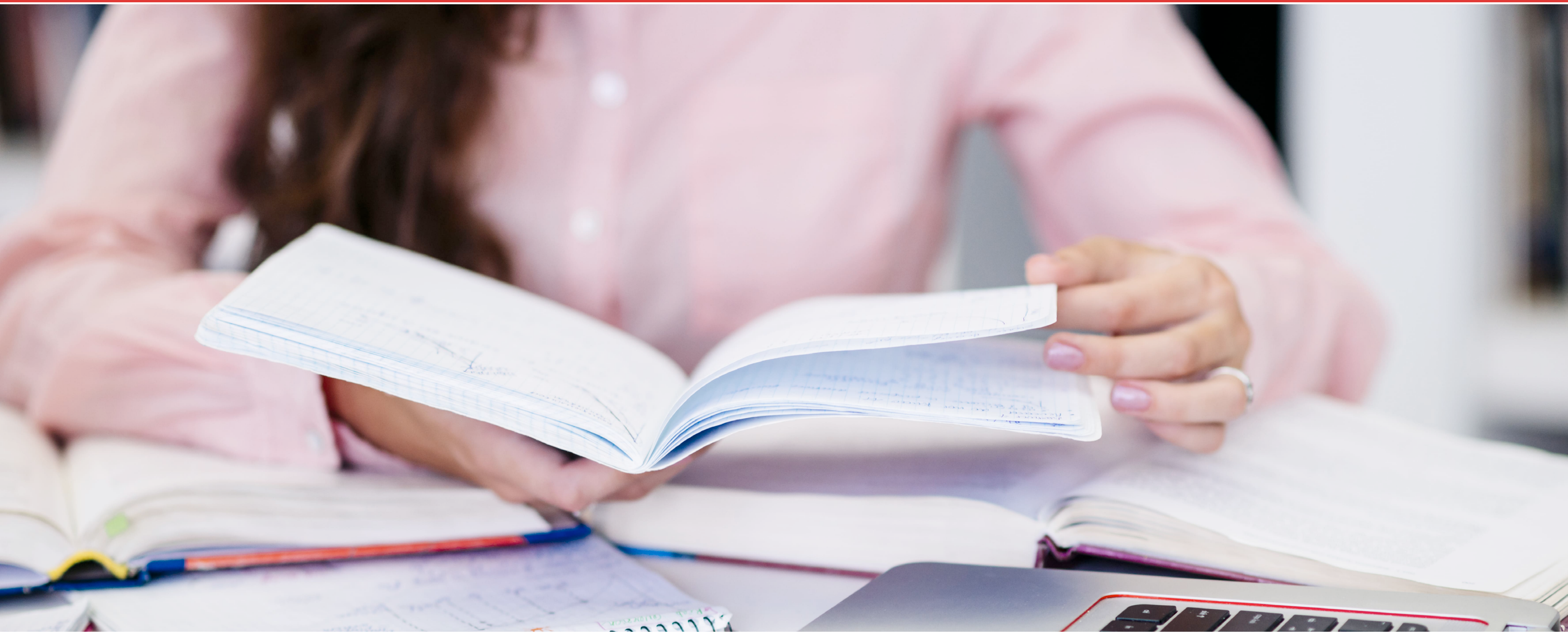
$$m_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-(4ac - b^2)}}{2a}$$

$$m_1 = -\frac{b}{2a} + i\,\frac{\sqrt{(4ac - b^2)}}{2a}$$

$$m_! = \alpha + i\beta \qquad (24)$$

Dónde se definirá $\alpha = -\frac{b}{2a}$ y $\beta = \frac{\sqrt{(4ac-b^2)}}{2a}$ teniendo finalmente que la solución general para este tipo de ecuación diferencial estará dada por:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} sen(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x) \qquad (25)$$



Ejemplo 12: Resolver la ecuación diferencial dada por:

$$4\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 17y = 0$$

En este caso tenemos que $a = 4$, $b = 4$ y $c = 17$, al hallar el discriminante tenemos que

$$b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(4)(17) = -256$$

Para este caso tenemos que $\alpha = -\frac{4}{2(4)} = -\frac{1}{2}$ y para $\beta = \frac{\sqrt{(4ac-b^2)}}{2a} = \frac{\sqrt{256}}{8} = \frac{16}{8} = 2$. Entonces la solución a la ecuación diferencial según (25) será:

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} sen(2x) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos(2x)$$

OTROS RECURSOS

Curso de ecuaciones diferenciales

Curso gratuito en la web

Ecuación diferencial de coeficientes constantes (segundo orden homogénea)

Video en la web

Ecuación diferencial de coeficientes constantes, con raíces complejas.

Video en la web

Estos enlaces no son producidos por la **Institución**, son un apoyo **adicional externo** que le suministramos a usted. En caso de daño de alguno de los links, por favor reportarlo a nuestra **Mesa de Ayuda.**